Jos. Petri.

Diss. Rostock

1904.

Theorie der aplanatischen Fläche und Versuche, sie auf Flächen zweiter Ordnung zu reduzieren.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

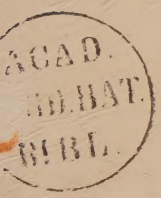
der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

JOSEF PETRI,

Ingenieur aus Trier.



Rostock 1904.

Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

Referent: Professor Dr. L. Matthiessen.

Meinen Eltern!

Inhaltsangabe.

Einleitung.

Erster Teil: Theorie der aplanatischen Fläche.

§ 1. Analytische Ableitung der Gleichung.

§ 2. Geometrische Konstruktion der Fläche.

§ 3. Die „Kartesischen Ovale".

§ 4. Die Bedingungsgleichungen für aplanatische Brechung.

Zweiter Teil: Die optischen Eigenschaften der Rotationsflächen zweiter Ordnung.

§ 5. Analytische Betrachtung.

§ 6. Geometrische Betrachtung.

Dritter Teil: Reduktion der aplanatischen Fläche vierter Ordnung auf eine solche zweiter Ordnung.

Einleitung.

Ein unendlich dünnes, stigmatisches oder astigmatisches Lichtstrahlenbündel wird an einer krummen Oberfläche im Allgemeinen astigmatisch gebrochen. Man erhält nicht ein punktuelles Bild, sondern zwei hinter einander liegende, zu kleinen Linien — Brennlinien — verzerrte Bilder. Sind die Lichtbündel von endlichem Querschnitt, so degenerieren die Brennlinien in Brennkurven oder Brennflächen.

Dieses Verhalten der Strahlenbündel wurde zuerst mathematisch behandelt von Jaques Sturm[1]), welcher zur Bestimmung der Entfernungen und Lagen der Brennlinien Gleichungen aufstellte, in welchen er die Objekt- und Bildabscissen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezog.

Eduard Reusch[2]) hat das Verdienst, die Haupt- oder Achsenstrahlen des einfallenden wie

[1]) J. Sturm — Mémoire sur l'optique, Compt. rend. XX (1845) und Pogg. Ann. 65 S. 116 und 374 (1845).

[2]) E. Reusch — Reflexion und Brechung des Lichtes in sphär. Flächen etc., Pogg. Ann. S. 497 (1867).

des gebrochenen Strahlenbündels als Abscissenachsen eingeführt zu haben, wobei der Einfallspunkt als Anfangspunkt gewählt ist. Ausserdem gab er durch Einführung von Fixpunkten geometrische Konstruktionen der Bildpunkte beziehungsweise -Kurven an.

Carl Neumann[1]) dehnte die Anwendung der Strahlenkoordinaten, welche von den älteren Autoren nur auf die Kugelfläche bezogen wurden, auf ganz beliebige krumme Flächen aus.

Im Anschluss an diese Forschungen förderte L. Matthiessen[2]) die Lehre vom Astigmatismus durch seine zahlreichen Veröffentlichungen.

Ausser diesen haben noch andere, besonders englische Forscher wie Hamilton[3]), Cayley[4]),

---

[1]) C. Neumann — Über die Brechung eines unendl. dünnen regul. Strahlenbündels. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math. Phys. Kl. S. 53 (1880).

[2]) L. Matthiessen — Über die Form der unendl. dünnen astigm. Strahlenbündel und die Kummer'schen Modelle. Münch. Ber. (1883).

— Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendl. dünner copulierter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl. Schlöm., Zeitschr. f. Math. u. Phys. (1884).

— Untersuchungen über die Konstitution unendl. dünner astigm. Strahlenbündel nach ihrer Brechung in einer krummen Oberfläche. Schlöm., Zeitschrift f. Math. u. Phys. (1884).

[3]) W. R. Hamilton — Systems of rays. Trans. Royal Irish Academy, vol. XV (1828), XVI (1830—31), XVII (1837).

[4]) A. Cayley — Memoir on caustics. Phil. Trans. (1857).

— Supplement to the memoir on caustics. Phil. Trans. (1867).

Scharpe[1]), Maxwell[2]), und Heath[3]) allgemeine Theorien der Kaustiken und der Brechung unendlich dünner Strahlenbündel entwickelt.

Die mathematische Behandlung der Strahlenbrechung an krummen Oberflächen ist von Wert für die Dioptrik des Auges, und man hat dieselbe bei der Untersuchung der Letzteren vielfach erfolgreich angewendet.

Von besonderer Bedeutung in der Ophthalmologie ist aber nicht die astigmatische, als vielmehr die stigmatische Brechung der Strahlen. Und deshalb ist es von Wichtigkeit, auf obigen Untersuchungen basierend, die Bedingungen festzulegen, unter denen die Brechung eines Lichtstrahlenbündels an einer krummen Fläche aplanatisch wird.

Eine solche Brechung findet z. B. dann statt, wenn die Gauss'schen Beschränkungen erfüllt sind, wobei sich die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung in beliebig vielen sphärischen Flächen wieder in einem Punkte schneiden, d. h. sie bleiben homocentrisch.

[1]) H. J. Scharpe — Systems of rays. Messenger, vol. III. (1874).

[2]) Maxwell — On the focal lines of a refrakted pencil. Lond. Math. Soc. vol. IV. (1871—73).

— On the application of Hamilton's characteristic funktion to the theory of any optical instrument symmetrical about an axis. Lond. Math. Soc. vol. VI. (1874—75).

— On Hamilton's charact. funct. for a narrow beam of light. Lond. Math. Soc. vol. VI. (1874—75).

[3]) R. S Heath — A Treatise on geometrical optics. Cambridge (1887).

Im Allgemeinen aber treten die Gauss'schen Beschränkungen nicht ein, weil die Strahlenbündel erstens eine gewisse Dicke besitzen, und zweitens grössere Winkel mit der Achse bilden. Doch gibt es bestimmte Flächen, an denen auch solche Strahlenbündel eine stigmatische Brechung erfahren.

Diese aplanatischen Flächen sind vierter Ordnung; zu ihnen gehören z. B. die „Kartesischen Ovale".

Aber auch bei Flächen zweiter Ordnung, beim Rotationsellipsoid und -hyperboloid, können, wie schon Déscartes[1]) erkannt hat, unter gewissen Bedingungen stigmatische Brechungen erfolgen.

Diese Erscheinungen der aplanatischen Brechung haben verschiedene Autoren[2]) wissenschaftlich zu begründen versucht, und besonders von Matthiessen[3]) sind eingehende Untersuchungen hierüber veröffentlicht worden.

[1]) Déscartes — La dioptrique, les météors et la géométrie. Leyde (1637).

[2]) W. Schön — Beiträge zur Dioptrik des Auges. Leipzig (1884).

Fr. Detels — Über homocentrische Brechung unendl. dünner cylindrischer Strahlenbündel in Rotationsfl. zweit. Ordnung. Inaug.-Diss., Rostock (1887).

[3]) L. Matthiessen — Neue Untersuchungen über den Aplanatismus und die Periskopie der Kristalllinse des Fischauges. Archiv f. Phys. (1881).

— Über aplanatische Brechung und Spiegelung in Oberflächen zweiter Ordnung und die Hornhautrefraktion. Pflüg. Arch. f. Phys., Bd. 91 (1902).

— Über die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenb. in belieb. krummen Oberflächen. Ann. d. Phys. Bd. 9 (1902).

In der folgenden Abhandlung soll auf Grund der Ergebnisse der erwähnten Forschungen eine allgemeine mathematische Betrachtung der aplanatischen Flächen vierter Ordnung angestellt werden, und dann soll versucht werden, dieselben auf Flächen zweiter Ordnung zu reduzieren.

Erster Teil.

Theorie der aplanatischen Fläche.

§ 1. Analytische Ableitung der Gleichung einer aplanatischen Rotationsfläche.

Zur Ableitung dieser Gleichung ist es nötig, den Satz von Fermat vorauszuschicken, welcher lautet:

„Die Gangzeit, welche ein Lichtstrahl gebraucht, um zu einem bestimmten Punkte des brechenden Mediums zu gelangen, ist ein Minimum, wenn er das Brechungsgesetz befolgt."

Zum Beweis dieses Satzes dient Figur 1.

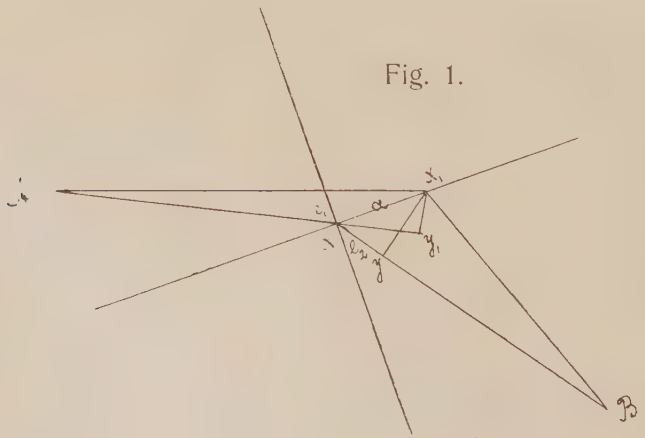


Fig. 1.

Es sei t die Wegezeit für A x B, und T sei diejenige für A x_1 B. Dann ist

$$t = \frac{A\,x}{v} + \frac{x\,y}{v_1} + \frac{y\,B}{v_1},$$

$$= \frac{A\,x}{v} + \frac{a \sin e_2}{v_1} + \frac{y\,B}{v_1},$$

Da nun $\sin e_2 : \sin e_1 = v_1 : v = \frac{x\,y}{a} : \frac{x\,y_1}{a}$ ist, so resultiert

$$t = \frac{A\,x}{v} + \frac{x\,y_1}{v} + \frac{y\,B}{v_1},$$

$$= \frac{A\,y_1}{v} + \frac{y\,B}{v_1}.$$

Ferner ist

$$T = \frac{A\,x_1}{v} + \frac{x_1\,B}{v_1}.$$

Es ist aber

$$A\,y_1 < A\,x_1,$$

$$y\,B < x_1\,B,$$

also muss $t < T$ sein.

Ausser dem Satz von Fermat ist derjenige von Malus vorerst zu erwähnen:

„Wenn die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen beliebig viele Reflexionen oder Refraktionen in einem nicht kristallinischen Medium erleiden, so stehen die Strahlen auf der Wellenfläche stets senkrecht.“

— Neumann dehnte diesen Satz auch auf anisotrope, unkristallinische Medien aus, deren Dichtigkeit stetig variiert. —

Aus diesen Sätzen ergeben sich diese Folgerungen: Wenn ein unendlich dünner homocentrischer Strahlenfächer, oder ein ebensolches Strahlenbündel,

von einem Medium gebrochen oder reflektiert wird, sodass auch das neue Bündel homocentrisch wird, so ist die Gangzeit sämtlicher Strahlen gleich gross. Die Wellenflächen, welche vom leuchtenden Punkte ausgehen und im folgenden Medium gegen den Lichtpunkt konvergieren, sind sphärisch und mit dem leuchtenden Punkte, respektive dem Bildpunkte koncentrisch.

Im Allgemeinen gelten diese Folgerungen auch für endlich dicke, homocentrisch gebrochene Strahlenbündel.

Erste Ableitung der Gleichung für eine aplanatische Rotationsfläche.

Für die folgenden Betrachtungen genügt es, dieselben auf die durch einen Achsenschnitt erhaltenen Kurven zu beschränken, da die Folgerungen auch für die Fläche selbst Gültigkeit haben.

Sind t_0 und t_1 die Zeiten, in welchen (Fig. 2) $P S = x_0$ und $S B = x_1$ zurückgelegt werden, τ_0 und τ_1 die Zeiten der Wege u_0 und u_1, so ist

$$t_0 + t_1 = \frac{-x_0}{v_0} + \frac{x_1}{v_1},$$

$$\tau_0 + \tau_1 = \frac{-u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1}.$$

Soll nun $t_0 + t_1 = \tau_0 + \tau_1 = T$ sein, so muss sein

$$(1) \qquad v_0 T = -x_0 + n x_1 = -u_0 + n u_1.$$

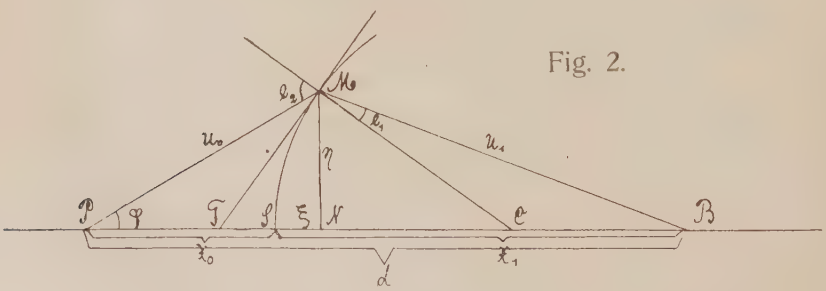


Fig. 2.

Zweite Ableitung der Gleichung einer aplanatischen Rotationsfläche.

Wir nehmen an, der leuchtende Punkt P (Fig. 2) liege in der Achse der Rotationsfläche, es sei P M ein beliebiger Strahl und B sei das homocentrische Bild des Strahlenfächers P S M. Die auf den Scheitel S der Rotationsfläche bezogenen rechtwinkligen Koordinaten von P, B und M seien $-x_0$, 0; x_1, 0; ξ, η; die laufenden Koordinaten der beiden Strahlen P M und B M, sowie der Tangente M T seien x, y. Dann fallen diese Koordinaten x und y der beiden Strahlen und der Tangente, welche an und für sich verschieden sind, für den Schnittpunkt M, — den Incidenzpunkt — zusammen, und man erhält als Gleichungen dieser Linien

$$\text{P M: } \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\eta}{\xi + x_0},$$

$$\text{B M: } \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\eta}{\xi - x_1},$$

$$\text{T M: } \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

oder geordnet

$$(2) \quad \begin{cases} y(\xi + x_0) - x\eta - x_0\eta = 0, \\ y(\xi - x_1) - x\eta + x_1\eta = 0, \\ y - x\frac{d\eta}{d\xi} - \left(\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0. \end{cases}$$

Für die Winkel, welche die beiden Strahlen mit der Tangente bilden, gelten die Gleichungen (Fig. 2)

$$\cos P\,M\,T = \sin e_2 = \frac{\overline{PM}^2 + \overline{TM}^2 - \overline{PT}^2}{2\,\overline{PM}.\,\overline{TM}},$$

$$\cos B\,M\,T = \sin e_1 = \frac{\overline{BM}^2 + \overline{TM}^2 - \overline{BT}^2}{2\,\overline{BM}.\,\overline{TM}}.$$

Man setzt die entsprechenden Werte ein und erhält nach vielfachen Umformungen

$$(3)\quad \begin{cases} \sin e_2 = \dfrac{\eta_1 + (\xi - x_0)\dfrac{d\xi}{d\eta_1}}{\sqrt{\left[\eta_1^2 + (\xi - x_0)^2\right]\left[1 + \left(\dfrac{d\xi}{d\eta_1}\right)^2\right]}}, \\ \sin e_1 = \dfrac{-\eta_1 + (x_1 - \xi)\dfrac{d\xi}{d\eta}}{\sqrt{\left[\eta_1^2 + (x_1 - \xi)^2\right]\left[1 + \left(\dfrac{d\xi}{d\eta_1}\right)^2\right]}}. \end{cases}$$

Nach der Division der beiden Gleichungen erhält man nach Einführung von n die Gleichung

$$(4)\quad \frac{\eta + (\xi - x_0)\dfrac{d\xi}{d\eta}}{\sqrt{\eta^2 + (\xi - x_0)^2}} + n\,\frac{\eta - (x_1 - \xi)\dfrac{d\xi}{d\eta}}{\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}} = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\sqrt{\eta^2 + (\xi - x_0)^2} + u_0 + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2} - n\,u_1 = 0.$$

Man erhält in Berücksichtigung von Gleichung (1)

$$(5)\quad -x_0 + n\,x_1 = \sqrt{\eta^2 + (\xi - x_0)^2} + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}$$

Diese Gleichung ist vierten Grades; demnach ist die aplanatische Fläche eine Fläche vierter Ordnung, die je nach dem Werte der Konstanten verschiedene Formen annimmt.

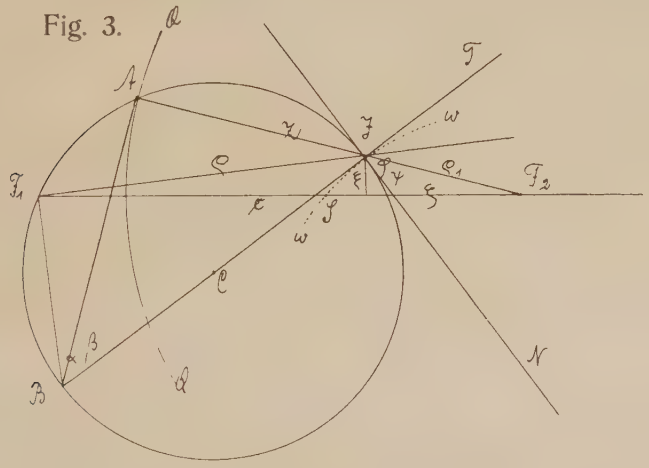
§ 2. Geometrische Konstruktion einer beliebigen aplanatischen Fläche.

Die geometrische Konstruktion derjenigen Fläche, respektive deren Schnittkurve, welche alle von einem beliebig entfernten Punkte ausgesandten Strahlen homocentrisch in einem zweiten, ebenfalls

beliebigen Punkte vereinigt, hat, nach Angaben von Schön[1]), Newton schon gegeben in seinen „Lectiones opticae, de Curvarum refractionibus“ Prop. XXXIV.

(Fig. 3). Wir nehmen zwei Brennpunkte F_1 und F_2 an, in zwei verschiedenen Medien gelegen, welche die Beziehung $= n$ zu einander haben. Es sei J der Incidenzpunkt. Bestimmt

Fig. 3.



soll werden die Krümmung der Kurve w w, welche vorhanden sein muss, damit alle von F_1 ausgehenden Strahlen homocentrisch nach F_2 hin gebrochen werden. Im Punkte J sei B T die Tangente und N J die Normale. Man beschreibt über der Tangente als Durchmesser einen Kreis, welcher durch J und den einen Brennpunkt F_1 geht. Der Kreis schneide die Verlängerung von F_2 J in A. Man verbinde B mit A und F_1.

[1]) W. Schön — Beiträge zur Dioptrik des Auges. Leipzig (1884).

Dann ist

$$F_1 J : B J = \sin \alpha = \sin \varphi,$$
$$A J : B J = \sin \beta = \sin \psi.$$

Es folgt

$$F_1 J : A J = \sin \varphi : \sin \psi = n.$$

Wir setzen $A F_2 = z$, $F_1 J = \rho$ und $F_2 J = \rho_1$, dann ist $A J = z - \rho_1$, und es folgt

$$\rho = n (z - \rho_1),$$

oder umgeformt und $zn = Z$ gesetzt

(6) $$\rho + \rho_1 n = zn = Z.$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (1).

Die Grösse z oder Z ist augenscheinlich eine Konstante, denn man kann auf jedem der von F_2 nach der Peripherie gezogenen Radien einen Punkt J so wählen, dass der vom Centrum entferntere Abschnitt des Radius (J A) zu der Entfernung des Punktes J vom einen Brennpunkte (F_1) in bestimmtem Verhältnis (1 : n) steht, die obige Gleichung also für alle diese Punkte Gültigkeit hat. Die Wahl von Z ist beliebig; doch ist für jeden Wert desselben die Lage des Schnittpunktes S — der Kurve w w mit der Achse $F_1 F_2$ — und überhaupt die ganze Kurve bestimmt. Wenn umgekehrt die Lage von S oder eines anderen Kurvenpunktes gegeben ist, so kann der Wert von Z nicht mehr beliebig angenommen werden, sondern man muss ihn berechnen aus der Gleichung: $\rho + \rho_1 n = Z$, wo $\rho = F_1 S$ und $\rho_1 = F_2 S$ zu setzen ist, wie aus obiger Entwicklung hervorgeht.

Wir wollen auch hier die Gleichung aufstellen. Es seien ξ, η und ζ die Koordinaten eines beliebigen

Punktes der Fläche, die Entfernung der Brennpunkte sei c, und F_1, der Leuchtpunkt, sei der Koordinatenanfang. Dann erhalten wir die Gleichung

$$Z = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (c - \zeta)^2} + n\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

oder, wenn wir uns auf die Betrachtung eines Meridionalschnittes beschränken

$$Z = \sqrt{\xi^2 + (c - \zeta)^2} + n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist vierten Grades und identisch mit Gleichung (5); also resultiert auch aus dieser Betrachtung, dass die aplanatischen Linien, also auch die aplanatischen Flächen von der vierten Ordnung sind.

§ 3. Die „Kartesischen Ovale".

Es ist bemerkenswert, dass schon im Jahre 1637 Déscartes[1]) — Kartesius — vier besondere aplanatische Flächen vierter Ordnung konstruiert hat, deren Konstruktion von der Vorerwähnten durchaus abweicht. Er fand diese in sich geschlossenen Flächen — Kartesische Ovale — bei seinen Versuchen zur Herstellung von Brillengläsern; und es erscheint angebracht, die Konstruktion derselben, wie die Betrachtung ihrer Eigenschaften inbezug auf Reflexion und Refraktion folgen zu lassen.

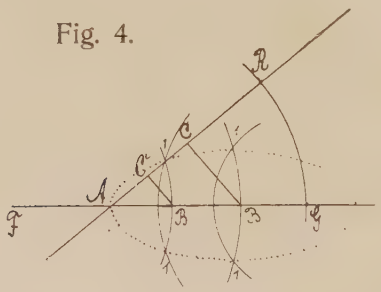
Konstruktion der Ovale.

Die Konstruktion des ersten Ovals, respektive eines Schnittes desselben ist die Folgende (Figur 4).

[1]) Déscartes — La Géométrie, Livre second.

Zwei gerade Linien FA und AR schneiden sich unter beliebigem Winkel im Punkte A. Auf der Geraden FA nimmt man den Punkt F mehr oder weniger von A entfernt liegend an, je nachdem man das Oval mehr oder weniger gross machen will, und beschreibt um ihn als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius FB > FA, welcher FA in B

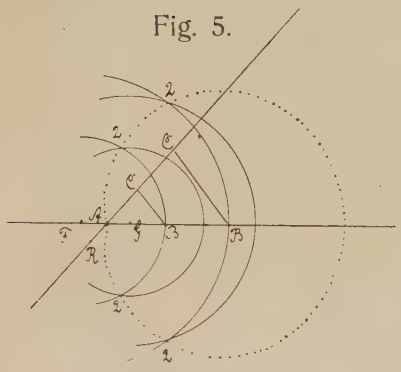
Fig. 4.



schneidet. Von B fällt man auf AR die Senkrechte BC. Dann gibt AC : AB das Verhältnis an, unter welchem die Brechung erfolgt. Nun wird auf FA der Punkt G so gewählt, dass folgende Proportion besteht: FA : GA = AC : AB. Man schlägt mit AG als Radius um A einen Kreis, welcher AR in R schneiden mag. Und mit RC als Radius beschreibt man um G einen Kreis, welcher den Kreis um F mit FB als Radius in den beiden Punkten 1 schneidet. Dann gehören diese Schnittpunkte 1 dem gesuchten Oval an. Entsprechend werden die übrigen Punkte gefunden.

Um das zweite Oval (Figur 5) zu finden nimmt man auf AR den Punkt R auf der entgegengesetzten

Fig. 5.

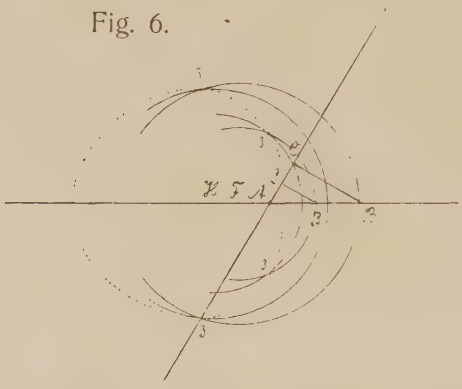


Seite von A an, macht wieder AR = AG, beschreibt um F einen beliebigen Kreis mit FB als Radius, fällt von B, dem Schnittpunkt dieses Kreises mit FA, die Senkrechte BC auf AR und schlägt um G mit RC als Radius einen Kreis, welcher den ersten Kreis in den beiden Punkten 2 schneidet; dieses sind Punkte des gesuchten zweiten Ovals.

Anstatt wie bei den Konstruktionen der beiden ersten Ovale den Punkt G rechts von A auf FA liegend anzunehmen, ist derselbe jetzt auf der linken Seite von A gelegen, etwa in H, und zwar ist AH > AF. Wie sich die Konstruktion des ersten Ovals von derjenigen des zweiten Ovals unterschied nach der Lage des Punktes R inbezug auf A, so erhalten wir entsprechend die beiden letzten Ovale: das dritte, wenn R links von A liegt — entsprechend der Konstruktion II — und das vierte, wenn R rechts von A gelegen ist — entsprechend der Konstruktion I. —

Man findet dem dritten Oval (Figur 6) zugehörige Punkte, indem man um F den beliebigen

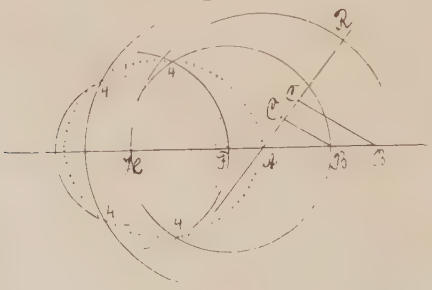
Fig. 6.



Kreis FB beschreibt, AR = AH macht und um H einen Kreis mit dem Radius RC schlägt, welcher den Kreis um F in den Punkten 3 schneidet, welche Punkte dem dritten Oval angehören.

Das vierte Oval (Figur 7) wird konstruiert, indem man um F den Kreis mit dem Radius FB schlägt, von B die Senkrechte BC auf AR fällt und mit RC als Radius um H einen Kreis beschreibt,

Fig. 7.



welcher denjenigen um F in den Punkten 4 schneidet, welches Punkte des vierten Ovals sind.

Bei den Konstruktionen aller vier Ovale kann der Punkt F mit A zusammenfallen, ohne jedoch eine Änderung hervorzurufen.

Die vier Ovale sind von vier ganz verschiedenen Arten, deren jede Einzelne wieder unzählige Unterarten enthält, da die Verhältnisse der Strecken AB und AC, sowie diejenigen von AF und AG, respektive AF und AH ganz verschieden sein können, und da ferner AG und AH grösser oder kleiner angenommen werden können.

Eigenschaften der Ovale inbezug auf Reflexion und Refraktion.

Kommt der vordere Teil des ersten Ovals (Figur 4) in Betracht, so werden hier sämtliche von F kommenden Strahlen im Verhältnis AB : AC nach G hin gebrochen. Inbezug auf den hinteren Teil des Ovals ist zu bemerken, dass die von G kommenden Strahlen an der konvexen Fläche nach F hin reflektieren, und zwar in demselben Verhältnis AB : AC, in welchem im vorderen Teil die Refraktion stattfindet.

Beim zweiten Oval (Figur 5) findet umgekehrt, sonst aber entsprechend dem ersten Oval, im vorderen Teil eine Reflexion und im hinteren Teil eine Refraktion statt. Es ist hier noch zu bemerken, dass, wenn die Strecke AG viel grösser als AF

wird, die Kurve bei A konvex wird, während sie in ihrem übrigen Verlauf konkav bleibt, sodass sie eine herzförmige Gestalt annimmt.

Dieses Letztere gilt auch für das dritte Oval (Figur 6), nur dass es unter derselben Bedingung bei A nicht konvex, sondern konkav, im Allgemeinen aber konvex verläuft. Bei dieser Kurve findet keine Reflexion, sondern stets nur Refraktion statt.

Das letzte Oval (Figur 7) dient ganz der Reflexion, sodass also die von H kommenden Strahlen an der stets konkaven Oberfläche nach F hin reflektiert werden.

Da die von dem Punkte F kommenden Strahlen bei sämtlichen Ovalen stets nach dem Punkte G, respektive H hin gebrochen werden, und umgekehrt, so kann man diese Punkte zweckentsprechend als Brennpunkte bezeichnen. —

§ 4. Die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen.

Nachdem wir durch Aufstellung der Gleichung wie durch geometrische Konstruktion die aplanatische Fläche vierter Ordnung kennen gelernt haben, wollen wir nun noch mit Hülfe der Neumann'schen Formeln, — welche die Brechung eines astigmatischen Strahlenbündels mit zwei Brennlinien in beliebigen krummen Oberflächen behandeln, — Bedingungsgleichungen aufstellen, für welche die Brechung eines homocentrischen Strahlen-

bündels in einer beliebigen Fläche ebenfalls eine homocentrische wird.

Wir geben hierzu die Darstellungen von Matthiessen[1]).

Es bedeuten ρ_1 und ρ_2 die Krümmungsradien des Haupt- und Nebennormalschnittes des Inzidenzpunktes, ε das Azimut der Einfallsebene gegen den Hauptnormalschnitt, e_2 und e_1 den Einfalls- und Brechungswinkel des Achsenstrahles, x_0 und ξ_0 die Abscissen der Brennlinien b_1 und b_2 des einfallenden, x_2 und x_1 die Abscissen der Brennlinien a_1 und a_2 des gebrochenen Strahles, ferner ϑ_1 und ϑ_2 die Azimute der Fokalebenen Σb_1 und $\Sigma_1 a_1$, $90^0 + \vartheta_1$, und $90^0 + \vartheta_2$ die Azimute der Fokalebenen Σb_2 und $\Sigma_1 a_2$ gegen die Einfallsebene.

Dann bestehen folgende Relationen (Neumann):

$$
(8)\quad
\begin{cases}
\dfrac{-\rho_1\rho_2}{\rho_2\cos\varepsilon^2+\rho_1\sin\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\sin e_1\cos e_2^2}{\sin(e_2-e_1)}\left[\dfrac{\cos\vartheta_1^2}{x_0}+\dfrac{\sin\vartheta_1^2}{\xi_0}\right] \\
\dfrac{+\rho_1\rho_2}{\rho_2\cos\varepsilon^2+\rho_1\sin\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\sin e_2\cos e_1^2}{\sin(e_2-e_1)}\left[\dfrac{\cos\vartheta_2^2}{x_2}+\dfrac{\sin\vartheta_2^2}{x_1}\right]=1, \\
\dfrac{-\rho_1\rho_2}{\rho_2\sin\varepsilon^2+\rho_1\cos\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\left[\dfrac{\sin\vartheta_1^2}{x_0}+\dfrac{\cos\vartheta_1^2}{\xi_0}\right] \\
\dfrac{+\rho_1\rho_2}{\rho_2\sin\varepsilon^2+\rho_1\cos\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\sin e_2}{\sin(e_2-e_1)}\left[\dfrac{\sin\vartheta_2^2}{x_2}+\dfrac{\cos\vartheta_2^2}{x_1}\right]=1, \\
\dfrac{-\rho_1\rho_2\sin e_1\cos e_2\sin 2\vartheta_1}{(\rho_1-\rho_2)\sin(e_2-e_1)\sin 2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{\xi_0}\right]+ \\
\dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_2\cos e_1\sin 2\vartheta_2}{(\rho_1-\rho_2)\sin(e_2-e_1)\sin 2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right]=1.
\end{cases}
$$

[1]) L. Matthiessen — Über die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen. Ann. d. Phys. Bd. 9 S. 691 (1902).

Wenn nun das einfallende Strahlenbündel homocentrisch, also $\xi_0 = x_0$ ist, so werden die Formeln folgende:

$$(9)\begin{cases}\dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_1}{(\rho_2\cos\varepsilon^2+\rho_1\sin\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\dfrac{\cos e_2^{\,2}}{x_0}+\dfrac{\sin e_2}{\sin e_1}\cos e_1^{\,2}\times\right.\\ \qquad\left.\left(\dfrac{\cos\vartheta_2^{\,2}}{x_2}+\dfrac{\sin\vartheta_2^{\,2}}{x_1}\right)\right\}=1,\\ \dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_1}{(\rho_2\sin\varepsilon^2+\rho_1\cos\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{\sin e_2}{\sin e_1}\times\right.\\ \qquad\left.\left(\dfrac{\sin\vartheta_2^{\,2}}{x_2}+\dfrac{\cos\vartheta_2^{\,2}}{x_1}\right)\right\}=1,\\ \dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_1}{(\rho_1-\rho_2)\sin(e_2-e_1)}\cdot\dfrac{\sin e_2}{\sin e_1}\cdot\dfrac{\cos e_1\sin 2\vartheta_2}{\sin 2\varepsilon}\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right)=1.\end{cases}$$

Da die Brechung eine aplanatische sein soll, so ist $x_1 = x_2$. Bei endlichen Azimuten ε erhält man anstatt der Gleichungen (9) folgende:

$$(10)\begin{cases}\dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_1}{(\rho_2\cos\varepsilon^2+\rho_1\sin\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\dfrac{\cos e_2^{\,2}}{x_0}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\sin e_2\cos e_1^{\,2}}{\sin e_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}\right\}=1,\\ \dfrac{\rho_1\rho_2\sin e_1}{(\rho_2\sin\varepsilon^2+\rho_1\cos\varepsilon^2)\sin(e_2-e_1)}\left\{-\dfrac{1}{x_0}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{\sin e_2}{\sin e_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}\right\}=1.\end{cases}$$

In der dritten Gleichung von (9) wird der Faktor $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=0$, erfordert also die Relation $\sin 2\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0^0$ oder 90^0, d. h. aplanatische Brechung kann nur eintreten, wenn die Einfallsebene mit einem der beiden Hauptnormalschnitte der brechenden Fläche coincidiert. Hierdurch gehen die Gleichungen (10) über in

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{-\rho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \dfrac{\cos e_2^{\,2}}{x_0} + \dfrac{\rho_1 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \dfrac{\cos e_1^{\,2}}{x_2} = 1, \\ \dfrac{-\rho_2 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{\rho_2 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \dfrac{1}{x_2} = 1. \end{cases}$$

Für die Werte von ρ_1 und ρ_2 ist vorausgesetzt, dass ρ_i dem Flächennormalschnitte der Einfallsebene mit dem Azimute $\varepsilon = 0^0$ angehört. Die beiden vorstehenden Formeln enthalten drei Variabelen: x_0, x_2 und e_2. Sie können demnach für jeden Einfallswinkel e_2 bestehen, wobei e_2 auf beiden Seiten der Normalen zwei gleiche und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte hat, welche aber in der Formel nichts ändern. Man erhält nun aus beiden Gleichungen die simultanen Werte von x_0 und x_2 für einen und denselben Einfallswinkel, nämlich

$$(12)\quad \begin{cases} x_0 (\rho_2 - \rho_1 \cos e_1^{\,2}) = \sin e_1 \sin(e_2 + e_1)\, \rho_1 \rho_2, \\ x_2 (\rho_2 - \rho_1 \cos e_2^{\,2}) = \sin e_2 \sin(e_2 + e_1)\, \rho_1 \rho_2, \end{cases}$$

und hieraus

$$x_2 : x_0 = \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos e_1^{\,2}}{\sin e_1} : \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos e^2_2}{\sin e_2}.$$

Dieses sind die gesuchten Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von unendlich dünnen Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen.

In den vorstehenden Ausführungen zur Theorie der aplanatischen Fläche haben wir diese analytisch und geometrisch behandelt, und wir haben diese Fläche als eine solche von der adäquaten Krüm-

mung der Flächen vierter Ordnung erkannt; — zu diesen gehören auch die „Kartesischen Ovale“, welche besonders dargestellt wurden. — Sodann haben wir die Neumann'schen Formeln für die Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels angewendet und die Bedingungen gefunden, unter welchen jenes in einer beliebigen krummen Fläche aplanatisch gebrochen wird. —

Zweiter Teil.

Die optischen Eigenschaften der Rotationsflächen zweiter Ordnung.

Um die aplanatischen Flächen vierter Ordnung praktisch nutzbar zu machen ist es nötig, dieselben auf Flächen zweiter Ordnung, welche durch Rotation von Kegelschnitten um ihre Achse gebildet sind, zurückzuführen.

Bevor wir jedoch jene Flächen zu reduzieren versuchen, wollen wir erst die Flächen zweiter Ordnung inbezug auf ihre optischen Eigenschaften einer Betrachtung unterziehen.

§ 5. Analytische Untersuchnng der Flächen zweiter Ordnung in ihrem Verhalten inbezug auf Reflexion und Refraktion.

Wir haben im § 4 für die aplanatische Brechung von unendlich dünnen Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen folgende Bedingungsgleichungen erhalten:

$$x_0 (\rho_2 - \rho_1 \cos e_1^2) = \sin e_1 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 \rho_2,$$

$$x_2 (\rho_2 - \rho_1 \cos e_2^2) = \sin e_2 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 \rho_2.$$

Wenn diese Relationen nun angewendet werden auf Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche durch Rotation von Kegelschnitten um ihre Achse gebildet sind, so wird $\rho_2 = N$, der Normalen des

Einfallpunktes, und die Gleichungen nehmen diese Form an:

$$(13)\quad \begin{cases} x_0 (N - \rho_1 \cos e_1^2) = \sin e_1 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N, \\ x_2 (N - \rho_1 \cos e_2^2) = \sin e_2 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N. \end{cases}$$

Es ist nun eine Eigenschaft der obigen Flächen, dass, wenn e_1 den Winkel bedeutet, welchen die Normale N mit dem rad. vect. r bildet, die Beziehung stattfindet:

$$(14)\qquad N - \rho_1 \cos e_1^2 = 0 \text{ (Newton).}$$

Um dies zu beweisen gehen wir aus von der allgemeinen Polargleichung der Kegelschnitte

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{e}{p} \cos \vartheta + \frac{1}{p}.$$

Differentiiert man dieselbe nach $d\vartheta$, so wird

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2 e}{p} \cdot \sin \vartheta.$$

Logarithmiert man beide Seiten, so resultiert

$$\lg \frac{dr}{d\vartheta} = 2 \lg r + \lg \frac{e}{p} + \lg \sin \vartheta.$$

Wir bringen die Glieder auf eine Seite und differentiieren nochmals, und wir erhalten

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - \cos \vartheta \frac{dr}{d\vartheta} = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Normalen ist

$$N = \frac{r \cdot \sin \vartheta}{\sin (\vartheta - e_1)} = \frac{r \cdot \sin \vartheta}{\sin \vartheta \cos e_1 - \cos \vartheta \sin e_1}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} e_1 = \frac{dr}{r\, d\vartheta};$$

setzen wir dieses ein, so resultiert

$$\cos e_1 = \frac{r\, d\vartheta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}; \quad \sin e_1 = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}},$$

woraus folgt

$$N = \frac{r\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}{r\,d\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\, dr}.$$

Ferner ist in Berücksichtigung der Differentialgleichung des Kegelschnittes

$$\rho_1 = \frac{(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{3/2}}{2\,dr^2 d\vartheta - r d^2 r\, d\vartheta + r^2 d\vartheta} = \frac{(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{3/2} : r\, d\vartheta^3}{\frac{2\,dr^2}{r\,d\vartheta^2} - \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} + r},$$

$$= \frac{(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{3/2}}{r\,d\vartheta^2 (r\,d\vartheta - \cot\vartheta\, dr)} = N\frac{(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)}{r^2 d\vartheta^2},$$

folglich ist

$$N = \rho_1 \cos e_1^2.$$

Für die Brechung ist der Aplanatismus abhängig von x_0 und e_2; also gilt die Gleichung für die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung nur für $x_0 = \infty$. Hieraus ergibt sich folgendes Theorem (Matthiessen):

„Wenn bei einer beliebigen Rotationsfläche zweiter Ordnung ein gebrochenes Strahlenbündel eines sehr entfernten leuchtenden Punktes durch einen Fokus geht, so ist die Brechung aplanatisch."

Dieser Satz ist bei dem Rotationsellipsoid und -hyperboloid an eine Bedingung über die Grösse des Brechungsindex n geknüpft, wenn der einfallende Hauptstrahl parallel zur Rotationsachse gerichtet ist. Wir wollen n für die Ellipse und Hyperbel bestimmen.

Für den Krümmungsradius des Oskulationskreises einer Kurve besteht die Gleichung

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}. \tag{15}$$

Die Scheitelgleichung der Ellipse lautet

$$x^2 - 2ax + \frac{a^2}{b^2} y^2 = 0. \tag{16}$$

Hieraus resultiert

$$y = \frac{b}{a} (2ax - x^2)^{1/2} \tag{17}$$

Man differentiiert diese Gleichung und erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{a - x}{(2ax - x^2)^{1/2}},$$

und hieraus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4}{a^4} \frac{(a - x)^2}{y^2}. \tag{18}$$

Durch zweimaliges Differentiieren der Gleichung (17) erhält man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b}{a} \frac{\frac{a^2}{b^2} y^2 + (a - x)^2}{\left(\frac{a^2}{b^2} y^2\right)^{3/2}}. \tag{19}$$

Die Werte für $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ setzt man in die Gleichung (15) ein, und man erhält nach vielfachen Umformungen

$$\rho = \frac{[y^2 (a^2 - b^2) + b^4]^{3/2}}{a b^4}. \tag{20}$$

Die allgemeine Gleichung der Normalen lautet

$$N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{21}$$

Setzt man in dieselbe die entsprechenden Werte für die Ellipse ein, so resultiert

$$N = y \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \frac{(a - x)^2}{y^2}},$$

und die weitere Entwicklung der Gleichung ergibt

(22) $$a^2 N^2 = y^2 (a^2 - b^2) + b^4.$$

Aus dieser Relation setzt man $a^2 N^2$ für die gleichen Werte in (20) ein, und man erhält

(23) $$\rho = \frac{a^2 N^3}{b^4}.$$

Aus Figur 8 erkennt man, dass

(24) $$\sin e_2 = \frac{y}{N},$$

und aus Gleichung (14) ergibt sich

$$\cos e_1^2 = \frac{N}{\rho} = 1 - \sin e_1^2.$$

Dann ist

$$n = \frac{\sin e_2}{\sin e_1} = \frac{\frac{y}{N}}{\sqrt{1 - \frac{N}{\rho}}}$$

$$n = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{e}.$$

Bezeichnet man die numerische Excentrizität mit $\varepsilon = \frac{e}{a}$, so ist

(25) $$n = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Für die Hyperbel wird der Brechungsindex auf analoge Weise bestimmt. Die Gleichung für die Hyberbel ist

(26) $$x^2 - 2ax - \frac{a^2}{b^2} y^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich

(27) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = + \frac{b^4}{a^4} \frac{(x-a)^2}{y^2},$$

$$(28) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a}\,\frac{\frac{a^2}{-b^2}y^2 + (x-a)^2}{\left(\frac{a^2}{-b^2}y^2\right)^{3/2}}.$$

Man erhält nach Einsetzung dieser Werte in die Gleichung (15)

$$(29) \qquad \rho = \frac{[y^2(a^2+b^2)+b^4]^{3/2}}{a\,b^4}.$$

Setzt man in die Gleichung für die Normale die Hyperbelwerte ein, so resultiert

$$(30) \qquad a^2N^2 = y^2(a^2+b^2)+b^4,$$

und man erhält nach Berücksichtigung dieser Gleichung für ρ den Wert

$$(31) \qquad \rho = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

In Figur 9 geht der Strahl von innen nach aussen; wir haben also zu setzen, wenn wir diese Figur beachten wollen

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin e_2}{\sin e_1},$$

oder

$$n = \frac{\sin e_1}{\sin e_2} = \frac{\sqrt{1-\frac{N}{\rho}}}{\frac{y}{N}},$$

$$n = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{e}{a}.$$

Wir erhalten also für den Brechungsindex den Wert

$$(32) \qquad n = \varepsilon.$$

§ 6. Geometrische Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung in ihrem Verhalten inbezug auf Reflexion und Refraktion.

Die optischen Eigenschaften des Rotationsellipsoids und -hyperboloids hat schon Déscartes[1]) mathematisch untersucht, und er hat für diese Flächen folgende Sätze ausgesprochen und geometrisch bewiesen:

Bei der Ellipse wie bei der Hyperbel werden die von einem Brennpunkte ausgehenden Strahlen nach dem andern Brennpunkte hin reflektiert; die aus unendlich weiter Entfernung kommenden, also parallel einfallenden Strahlen, werden nach dem vom Incidenzpunkt entfernteren Brennpunkte hin gebrochen unter der Bedingung, dass bei der Ellipse der Brechungsindex gleich ist der halben grossen Achse, dividiert durch die Excentrizität, und dass bei der Hyperbel der Brechungsindex gleich ist dem Quotienten aus der Excentrizität und der halben grossen Achse.

In Figur 8 sind von dem beliebigen Punkte B der Ellipse DKB die beiden Radienvectoren nach den Brennpunkten F und G gezogen. Durch B geht die Tangente CE und die Normale BN. Dann hat folgender Satz Gültigkeit:

Die Winkel, welche die Radienvectoren mit der Tangente bilden, sind einander gleich, und die Normale halbiert den Winkel zwischen beiden Radienvectoren.

[1]) Déscartes — La Dioptrique, Discours huitième.

In der Figur ist AB # DK, ferner ist AB = BG. Von A und G sind die Senkrechten auf LJ gefällt. Dann ist

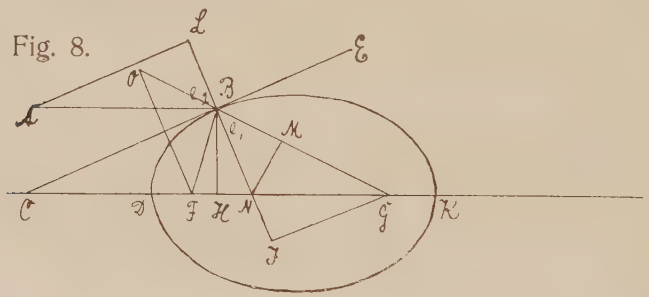
(33) $$AL : GJ = DK : FG = n,$$

d. h. die von A kommenden Lichtstrahlen werden bei B im Verhältnis DK : FG = n gebrochen und gehen durch den Punkt G.

Dies gilt für alle Punkte der Ellipse, da B beliebig gewählt ist.

Zum Beweise fällt man von B die Senkrechte BH auf DK und vom Schnittpunkt N der Strecken DK und LJ die Senkrechte NM auf BG.

Fig. 8.



Dann ist (Fig. 8)

$$\triangle BHN \sim \triangle BLA,$$
$$\triangle BMN \sim \triangle BJG,$$

und es folgt

$$\triangle BHN : \triangle BMN = \triangle BLA : \triangle BJG,$$

(34) $$AL : GJ = BH : NM.$$

Ferner ist

$$\triangle BHG \sim \triangle NMG,$$

woraus sich ergibt

(35) $$BH : NM = BG : NG.$$

Man ziehe FO # NB und verlängere BG bis O.

Dann ist

$$\triangle BNG \sim \triangle OFG,$$

also auch

(36) $$BG : NG = OG : FG.$$

$\triangle OBF$ ist gleichschenklig, da $\angle FOB = \angle JBG = \angle JBF = \angle OFB$.

Es resultiert

$$OB = FB,$$

und

(37) $$OG = DK.$$

Man erhält also

$AL : GJ = BH : NM = BG : NG \quad OG : FG = DK : FG,$

oder

$$AL : GJ = DK : FG = n.$$

Demnach ist

38) $$n = \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Für die Hyperbel wird der Beweis entsprechend geführt.

Hier wird folgender Satz angewendet:

Die Tangente halbiert den Winkel zwischen den beiden Radienvectoren, und die Winkel, welche die Radienvectoren mit der Normale bilden, sind einander gleich.

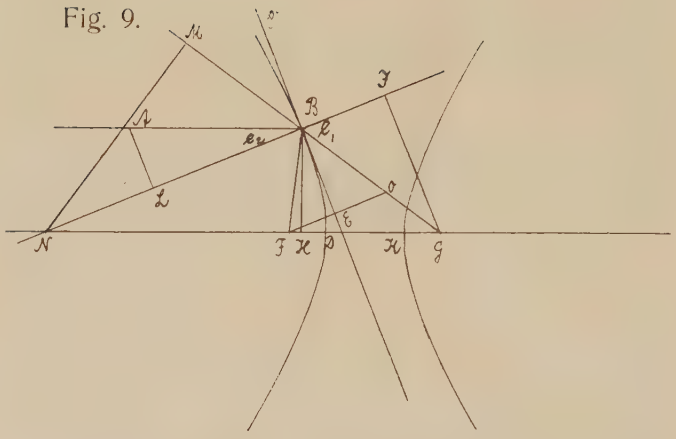
Es muss auch hier sein (Fig. 9)

$$AL : GJ = DK : FG.$$

Wie aber aus der Figur ersichtlich ist, geht hier der Strahl aus dem dichteren ins dünnere Medium über; es muss also die Relation bestehen

(39) $$GJ : AL = FG : DK = n.$$

Fig. 9.



Auch hier folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BHN und BLA einerseits und der Dreiecke BMN und BJG andererseits, dass

(40) $$JG : AL = NM : BH.$$

Ferner ist

$$\triangle BHG \sim \triangle NMG \text{ und } \triangle BNG \sim \triangle OFG,$$

also ist auch

(41) $$NM : BH = NG : BG,$$

(42) $$NG : BG = FG : OG.$$

$\triangle FBO$ ist gleichschenklig, sodass also $FB = BO$, und

(43) $$OG = DK.$$

Man erhält demnach

$$JG : AL = NM : BH = NG : BG = FG : OG = FG : DK,$$

oder

(44) $$n = \frac{e}{a} = \varepsilon.$$

Wir haben also auf analytische und geometrische Weise gefunden, dass für parallel der Rotationsachse einfallende Strahlen der Brechungsindex bei der Ellipse $= \frac{1}{\varepsilon}$ und bei der Hyperbel $= \varepsilon$ sein muss, wenn Aplanatismus stattfinden soll.

— Die Parabel kommt nicht in Betracht, denn wenn man diese als eine Ellipse auffasst, deren ein Brennpunkt im Unendlichen liegt, so ist die grosse Achse sowohl wie die Excentrizität unendlich gross, folglich die numerische Excentrizität $\varepsilon = 1$. Es werden also bei derselben die von dem auf der konvexen Seite der Kurve liegenden, unendlich weit entfernten Brennpunkte kommenden Strahlen in dem auf der konkaven Seite unendlich entfernt gelegenen zweiten Brennpunkt vereinigt, sodass also die Parabel keine reelle dioptrische Bedeutung hat. —

Dritter Teil.

Reduktion der aplanatischen Fläche vierter Ordnung auf eine solche zweiter Ordnung.

Wir haben die Bedingungsgleichungen für aplanatische Brechung an beliebigen Oberflächen schon früher auf Rotationsflächen zweiter Ordnung angewendet und die Gleichungen in folgender Form erhalten

$$x_0 (N - \rho_1 \cos e_1^2) = \sin e_1 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N,$$
$$x_2 (N - \rho_1 \cos e_2^2) = \sin e_2 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N.$$

Rückt der leuchtende Punkt ins Unendliche, d. h. wird der einfallende Strahl der Centralachse parallel, so reduzieren sich die Bedingungsgleichungen folgendermassen:

$$N - \rho_1 \cos e_1^2 = \left[\frac{\sin e_1 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N}{x_0}\right]_{x_0 = \infty} = 0,$$

$$N - \rho_1 \cos e_2^2 = \left[\frac{\sin e_2 \sin (e_2 + e_1) \rho_1 N}{x_2}\right]_{x_2 = \infty} = 0,$$

— für den von aussen eintretenden und den von innen austretenden Strahl, — welche Gleichungen, wie früher erkannt wurde, allen Kurven zweiter Ordnung eigentümlich sind.

Wir wollen nun die allgemeine Gleichung für die aplanatische Fläche vierter Ordnung reduzieren

indem wir die optischen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung beachten.

Die Gleichung (5) lautet

$$-x_0 + n x_1 = \sqrt{\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2} + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}.$$

In einzelnen Fällen ist die Polargleichung der aplanatischen Fläche von Nutzen.

Wir wollen dieselbe aufstellen und gehen dazu aus von der Relation (1)

$$-x_0 + n x_1 = -u_0 + n u_1.$$

Die Entfernung von Objekt und Bild ist in Rücksicht auf das Vorzeichen der Richtung (Fig. 2):

(45) $$d = -x_0 + x_1;$$

es sei

(46) $$-x_0 + n x_1 = f.$$

Dann ist

$$u_1^2 = u_0^2 + d^2 - 2 u_0 d \cos\varphi,$$

also

$$(u_0 + f)^2 = n^2 (u_0^2 + d^2 - 2 u_0 d \cos\varphi),$$

$$u_0^2 + 2 u_0 f + f^2 = n^2 (u_0^2 + d^2 - 2 u_0 d \cos\varphi),$$

$$u_0^2 (n^2 - 1) - 2u_0 (d n^2 \cos\varphi + f) + n^2 d^2 - f^2 = 0,$$

(47) $$u_0^2 - 2u_0 \left(\frac{d n^2 \cos\varphi + f}{n^2 - 1}\right) + \frac{n^2 d^2 - f^2}{n^2 - 1} = 0.$$

Die Gleichungen (5) und (47) lassen sich auf Kurven zweiten Grades reduzieren.

I. Die Gleichung (5) wird quadratisch, wenn man setzt

(48) $$x_0 = x_1.$$

Man findet

$$x_1 (-1 + n) = \sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}\,(n + 1),$$

$$x_1 \frac{n - 1}{n + 1} = \sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2},$$

$$\eta_1^2 + 2n\eta_1^2 + n^2\eta_1^2 = \xi x_1 (2 + 4n + 2n^2) - \xi^2(1 + 2n + n^2),$$

(49) $$\eta^2 = 2\xi x_1 - \xi^2 \text{ (Kugel).}$$

Da der Radius dieser Kugel x_1 ist, so ist auch nach der Voraussetzung: $x_0 = x_1 = r$; d. h. es findet eine Symptose im Centrum der Kugel statt.

Ausserdem kann n beliebig angenommen werden, da es in Gleichung (49) nicht vorkommt.

Zieht man die Polargleichung in Betracht, so wird sie vom ersten Grade, wenn $n^2 - 1 = 0$ gesetzt wird. Man erhält

$$(n^2 - 1)u_0^2 - 2u_0(f + dn^2\cos\varphi) + (n^2d^2 - f^2) = 0,$$

(50) $$u_0 = \frac{1}{2}\frac{n^2d^2 - f^2}{f + dn^2\cos\varphi} \text{ (Kegelschnitt).}$$

Nimmt man weiter

$$d = -x_0 + x_1$$

und

$$x_0 = x_1,$$

so wird $d = 0$ und

(51) $$u_0 = -\frac{1}{2}f.$$

Da $n^2 - 1 = 0$, also $n = \pm 1$ ist und

$$u_0 = \frac{1}{2}(x_0 - n x_1),$$

(52) $$= \frac{1}{2}x_0(1 - n),$$

so erhalten wir die Gleichung einer Kugel, weil

$$u_0^2 = \frac{1}{4}f^2$$

(53) $$= \eta^2 + (-x_0 + \xi)^2.$$

Für die Brechung ist $n = +1$, also $u_0 = 0$ und $u_1 = 0$.

Wir erhalten in diesem Falle eine Symptose im Scheitel der Kugel.

Für die Spiegelung ist $n = -1$, und ferner $u_0 = x_0$ und $u_1 = x_1$. Nach der Voraussetzung ist $x_0 = x_1$, also erhalten wir hier eine Spiegelung vom Centrum der Kugel aus.

II. Die Kugelfläche ist für schiefe Incidenz noch in anderer Weise aplanatisch.

Man setzt

(54) $$x_0 = n\,x_1$$

und erhält unter Berücksichtigung dieser Gleichung aus (5):

$$\sqrt{\eta^2 + (-nx_1 + \xi)^2} + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2} = 0,$$

$$\eta^2 + (-nx_1 + \xi)^2 = n^2(\eta^2 + (x_1 - \xi)^2),$$

$$\eta^2(1 - n^2) = \xi(2nx_1 - 2n^2x_1) - \xi^2(1 - n^2),$$

$$\eta^2 = \xi\frac{2nx_1 - 2n^2x_1}{1 - n^2} - \xi^2,$$

(55) $$= 2x_1\xi\frac{n}{1+n} - \xi^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel mit dem Radius R, also

$$\eta^2 = 2R\xi - \xi^2$$

und

$$R = \frac{nx_1}{n+1} = \frac{x_0}{1+n}.$$

III. Wir wollen nun voraussetzen, dass die Kurve eine Ellipse sei, deren Scheitelgleichung lautet

$$\eta^2 = 2\frac{b^2}{a}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2,$$

und wir suchen einen Wert x_1, für welchen die zweite Wurzelgrösse der Gleichung (5) rational wird.

Durch Substitution von η^2 in dieselbe wird

$$\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2} = \sqrt{2\frac{b^2}{a}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2 + (x_1 - \xi)^2},$$

oder umgeformt

$$\eta^2 + (x_1 - \xi)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\xi^2 - 2\left(x_1 - \frac{b^2}{a}\right)\xi + x_1^2. \tag{56}$$

Diese Gleichung wird quadratisch, wenn ist

$$\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x_1^2 = \left(x_1 - \frac{b^2}{a}\right)^2, \tag{57}$$

und die Gleichung (57) wird erfüllt durch die Werte

$$x_1 = a \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

d. h. es muss der Bildpunkt in einem der Brennpunkte der Ellipse liegen.

Verfolgen wir dies weiter, indem wir n in die Rechnung einführen, so erhalten wir aus Gleichung (56) nach einigen Umformungen und mit Berücksichtigung von Gleichung (57) folgende Relation:

$$\eta^2 + (x_1 - \xi)^2 = \left(x_1 - \xi\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)^2,$$

oder

$$\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2} = x_1 - \varepsilon\xi. \tag{58}$$

Die Gleichung der Kurve lautet dann

$$-x_0 + n x_1 = \sqrt{\eta^2} + (-x_0 + \xi)^2 + n(x_1 - \varepsilon\xi),$$

oder umgeformt

$$\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2 = [-x_0 + n x_1 - n(x_1 - \varepsilon\xi)]^2,$$

$$= x_0^2 - 2 n x_0 \varepsilon\xi + n^2\varepsilon^2\xi^2,$$

$$\eta^2 = 2 x_0 \xi(1 - n\varepsilon) - \xi^2(1 - n^2\varepsilon^2). \tag{59}$$

Es ist aber zugleich nach der Voraussetzung

$$\eta^2 = 2\frac{b^2}{a}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2,$$

$$= 2 p_0 \xi - (1 - \varepsilon^2)\xi^2. \tag{60}$$

Die beiden Gleichungen (59) und (60) können nur mit einander bestehen, wenn entweder $\varepsilon = 0$ (Kugel), oder $n = \pm 1$ ist. Die Übereinstimmung der

aplanatischen Linie und der Ellipse ist um so genauer, je kleiner ε ist, oder je weniger n von $+1$ abweicht.

Ferner ergibt sich aus (59):

$$2\,x_0\,(1-n\varepsilon) = 2\,\frac{b^2}{a},$$

oder

$$x_0 = \frac{b^2}{a - n\sqrt{a^2 - b^2}}, \tag{61}$$

und für die Bedingung $\varepsilon = 0$ (Kugel):

$$b = a;\ x_0 = a;\ x_1 = a. \tag{62}$$

Für die Bedingung $n = -1$ (Spiegelung) wird:

$$x_0 = a - \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{63}$$

Um x_1 zu finden gehen wir aus von Gleichung (58), welche wir quadrieren. Man erhält

$$\eta^2 + (x_1 - \xi)^2 = x_1^2 - 2\,\varepsilon x_1 \xi + \varepsilon^2 \xi^2,$$

oder vereinfacht

$$\eta^2 - 2\,x_1\,(1-\varepsilon)\,\xi + (1-\varepsilon^2)\,\xi^2 = 0.$$

In Berücksichtigung von Gleichung (60) resultiert

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{64}$$

Ist also der eine Brennpunkt x_0 leuchtend, so wird der andere x_1 das homocentrische Bild.

IV. Es wird ferner je einer der Wurzelausdrücke in Gleichung (5) rational, wenn entweder x_0 oder x_1 unendlich gross werden.

Erstens sei

$$x_0 = -\infty, \tag{65}$$

dann wird

$$x_1 = \frac{n r_0}{n-1}, \tag{66}$$

wo r_0 der Krümmungsradius des Scheitels ist.

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von Gleichung (5). Aus der ersten Wurzel der Letzteren verschwindet η, sodass wird

$$\sqrt{\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2} = -(x_0 - \xi),$$

und die Gleichung (5) geht über in

$$-x_0 + nx_1 = -(x_0 - \xi) + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2}.$$

Mit Berücksichtigung von (54) resultiert

$$nx_1 - \xi = n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2},$$

$$(nx_1 - \xi)^2 = n^2[\eta^2 + (x_1 - \xi)^2],$$

oder geordnet

$$\eta^2 = 2\frac{n-1}{n}x_1\xi - \frac{n^2-1}{n^2}\xi^2, \tag{67}$$

und zugleich ist

$$\eta^2 = 2\frac{b^2}{a}\xi - (1 - \varepsilon^2)\xi^2 \text{ (Ellipse)},$$

folglich ist

$$n\varepsilon = 1$$

und

$$\frac{n-1}{n}x_1 = \frac{b^2}{a} = r_0,$$

oder

$$x_1 = \frac{nr_0}{n-1}.$$

Hieraus folgt nun

$$x_1 = \frac{b^2 n}{a(n-1)},$$

$$= \frac{b^2}{a}\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)},$$

und da $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ ist, ergibt sich

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2} \text{ (zweiter Fokus)}. \tag{68}$$

— Um die Anwendbarkeit dieser letzten Resultate auf die im Allgemeinen aplanatische Hornhaut eines Auges zu prüfen, setzen wir z. B. für die Hornhaut des Rindsauges die von Mönnich[1]) gemessenen Werte für $n = 1{,}3360$ und für $r_0 = 14{,}5$ mm in die folgenden Gleichungen ein, und wir erhalten

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1{,}3360^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{14{,}5}{a},$$

also

$$a = \frac{14{,}5 \cdot 1{,}3360^2}{2{,}3360 \cdot 0{,}23360} = 32{,}97 \text{ mm}.$$

Weiter ist

$$\frac{b^2}{a} = 14{,}5 \text{ mm},$$

$$b^2 = 14{,}5 \cdot 32{,}97$$

und

$$b = 21{,}86 \text{ mm}.$$

Diese Werte für a und b stimmen mit den an Rindsaugen gemessenen Werten nicht überein, sodass hieraus die Folgerung zu nehmen ist, dass die Parallelstrahlen für die Hornhaut nicht für den Aplanatismus berechnet sind. —

Zweitens sei nun

(69) $$x_1 = +\infty,$$

dann ist

(70) $$x_0 = \frac{-r_0}{n-1}.$$

[1]) P. Mönnich — Über den phys.-opt. Bau des Rindsauges. Inaug.-Diss. Rostock (1883).

Es verschwindet nämlich in diesem Falle in Gleichung (5) aus der zweiten Wurzel die Grösse η, und man erhält

$$\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2} = x_1 - \xi,$$

sodass die Gleichung (5) übergeht in

$$-x_0 + n x_1 = \sqrt{\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2} + n(x_1 - \xi).$$

Hieraus erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\sqrt{\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2} &= -x_0 + n\xi, \\
\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2 &= (-x_0 + n\xi)^2, \\
\eta^2 &= 2\xi(x_0 - n x_0) + \xi^2(n^2 - 1), \\
&= 2x_0(1 - n)\xi + (n^2 - 1)\xi^2. \qquad (71)
\end{aligned}$$

Da nun auch

$$\eta^2 = 2\frac{b^2}{a}\xi - (1 - \varepsilon^2)\xi^2$$

ist, so folgt die Bedingung, dass

$$n = \varepsilon,$$

und weiter ist

$$2x_0(1 - n) = 2\frac{b^2}{a} = 2r_0,$$

also

$$x_0 = \frac{-r_0}{n - 1}.$$

Ferner ist

$$x_0 = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \varepsilon} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}}$$

$$= a + \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (72)$$

d. h. der leuchtende Punkt muss im vorderen Brennpunkt der Hyperbel liegen.

V. Wir können noch weiter annehmen, dass zwar weder x_0 noch x_1 unendlich gross wird, aber doch so gross, dass man durch Vernachlässigung höherer als zweiter Potenzen der Koordinaten η und ξ noch imstande ist, diejenige Kurve zweiten Grades zu bestimmen, welche sich der aplanatischen Kurve auf messbare Strecken, vom Scheitel angerechnet, möglichst genau anschmiegt, und zwar genauer als der Krümmungskreis des Scheitels.

Erstens: Wir setzen voraus, dass x_0 sehr gross gegen η, also auch gegen ξ sei.

Dann ergeben sich folgende Relationen:

$$\sqrt{\eta^2 + (-x_0 + \xi)^2} = \sqrt{\eta^2 - (x_0^2 - 2x_0\xi + \xi^2)},$$

$$= x_0 \sqrt{-1 + \frac{2\xi}{x_0} - \frac{-\eta^2 + \xi^2}{x_0^2}},$$

$$= x_0 \left(-1 + 2\frac{\xi}{x_0} - \frac{-\eta^2 + \xi^2}{x_0^2}\right)^{1/2},$$

$$= x_0 \left(-1 + \frac{\xi}{x^0} - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0^2}\right),$$

$$= -x_0 + \xi - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0},$$

und die Gleichung (5) erhält die Form

$$(73) \quad -x_0 + n x_1 = -x_0 + \xi - \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0} + n\sqrt{\eta^2 + (x_1 - \xi)^2},$$

daraus resultiert

$$\left(n x_1 - \xi + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0}\right)^2 = n^2\eta^2 + n^2 x_1^2 - 2n^2 x_1 \xi + n^2\xi^2,$$

$$n^2 x_1^2 - 2n x_1 \xi + n\frac{x_1}{x_0}\eta^2 + \xi^2$$

$$= n^2\eta^2 + n^2 x_1^2 - 2n^2 x_1 \xi + n^2\xi^2,$$

$$(74) \qquad \eta^2 = \frac{2(n-1)x_1}{n - \frac{x_1}{x_0}}\xi - \frac{n^2 - 1}{n\left(n - \frac{x_1}{x_0}\right)}\xi^2.$$

Da nun ist

$$\eta^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a^2}\,\xi^2 = 2\,r_0\,\xi - (1-\varepsilon^2)\,\xi^2,$$

so folgt weiter

$$\frac{n^2-1}{n\left(n-\frac{x_1}{x_0}\right)} = 1-\varepsilon^2, \tag{75}$$

und ferner ist

$$\frac{x_1\,(n-1)}{n-\frac{x_1}{x_0}} = \frac{b^2}{a} = r_0.$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man

$$x_1 = \frac{r_0\,(n+1)}{n\,(1-\varepsilon^2)}. \tag{76}$$

Um x_0 zu finden geht man aus von der ersten dieser letzten Gleichungen und erhält

$$n - \frac{x_1}{x_0} = \frac{n^2-1}{n\,(1-\varepsilon^2)},$$

$$\frac{x_1}{x_0} = n - \frac{n^2-1}{n\,(1-\varepsilon^2)},$$

$$= \frac{1-n^2\,\varepsilon^2}{n\,(1-\varepsilon^2)},$$

$$x_0 = x_1\,\frac{n\,(1-\varepsilon^2)}{1-n^2\,\varepsilon^2}$$

$$= \frac{r_0\,(n+1)}{n\,(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{n\,(1-\varepsilon^2)}{1-n^2\,\varepsilon^2},$$

$$= \frac{r_0\,(n+1)}{1-n^2\,\varepsilon^2}. \tag{77}$$

Strenge erfüllt wird also die Voraussetzung durch $n\varepsilon = 1$. Ist $n\varepsilon < 1$, so wird x_0 positiv und der leuchtende Punkt imaginär.

Zweitens: es soll x_1 verhältnismässig gross gegen η und ξ sein.

Dann ergeben sich diese Folgerungen:

$$n\sqrt{\eta^2+(x_1-\xi)^2} = n\sqrt{\eta^2+x_1^2-2x_1\xi+\xi^2},$$

$$= nx_1\sqrt{1-2\frac{\xi}{x_1}+\frac{\eta^2+\xi^2}{x_1^2}},$$

$$= nx_1\left(1-2\frac{\xi}{x_1}+\frac{\eta^2+\xi^2}{x_1^2}\right)^{1/2},$$

$$= nx_1\left(1-\frac{\xi}{x_1}+\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_1^2}\right),$$

$$= nx_1 - n\xi + \frac{1}{2}n\frac{\eta^2}{x_1}.$$

Die Gleichung (5) lautet dann

$$(78)\quad -x_0+nx_1 = \sqrt{\eta^2+(-x_0+\xi)^2}+nx_1-n\xi+\frac{1}{2}n\frac{\eta^2}{x_1}$$

Weiter ergibt sich

$$\eta^2+(-x_0+\xi)^2 = n^2x_1^2\frac{\xi^2}{x_1^2}-2nx_1x_0\frac{\xi}{x_1}+nx_1x_0\frac{\eta^2}{x_1^2}+x_0^2,$$

$$\eta^2-2x_0\xi+\xi^2 = n^2\xi^2-2nx_0\xi+n\frac{x_0}{x_1}\eta^2,$$

$$(79)\quad \eta^2-\frac{2x_0(n-1)}{n\frac{x_0}{x_1}-1}\xi+\frac{n^2-1}{n\frac{x_0}{x_1}-1}\xi^2=0.$$

Da x_1 gross und x_0 klein dagegen ist, so wird der Faktor ξ^2 negativ, also die Kurve hyperbolisch.

Ferner ist

$$\eta^2-2\frac{b^2}{a}\xi+\frac{b^2}{a^2}\xi^2=0$$

oder

$$\eta^2-2r_0\xi+(1-\varepsilon^2)\xi^2=0$$

Daraus folgt

$$\frac{n^2-1}{n\frac{x_0}{x_1}-1}=1-\varepsilon^2. \tag{80}$$

Weiter ist

$$\frac{x_0(n-1)}{n\frac{x_0}{x_1}-1}=r_0. \tag{81}$$

Dividiert man diese letzte Gleichung durch die vorangehende, so resultiert

$$x_0=\frac{(n+1)\,r_0}{1-\varepsilon^2}. \tag{82}$$

Aus Gleichung (80) erhält man x_1 wie folgt

$$n\frac{x_0}{x_1}-1=\frac{n^2-1}{1-\varepsilon^2},$$

$$x_1=\frac{1-\varepsilon^2}{n^2-\varepsilon^2}\cdot\frac{n\,(n+1)\,r_0}{1-\varepsilon^2}$$

$$=\frac{n\,(n+1)\,r_0}{n^2-\varepsilon^2}. \tag{83}$$

Die Voraussetzung wird strenge erfüllt durch $n-\varepsilon$; x_0 ist negativ, der leuchtende Punkt reell, wenn r_0 positiv, also die Kurve nach vorne konvex ist.

VI. Als letzten Fall setzen wir voraus, dass sowohl x_0 als x_1 sehr gross gegen η und ξ seien, die Strahlen werden also paraxial.

Dann lautet die reduzierte Gleichung (5):

$$-x_0+nx_1=-x_0+\xi-\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0}+nx_1-n\xi+\frac{1}{2}n\frac{\eta^2}{x_1},$$

oder

$$\xi-\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{x_0}-n\xi+\frac{1}{2}n\frac{\eta^2}{x_1}=0. \tag{84}$$

Daraus folgt

$$\eta^2 = \frac{2\,(n-1)}{\frac{n}{x_1} - \frac{1}{x_0}}\,\xi$$

$$= 2\,\frac{b^2}{a}\,\xi = 2\,r_0\,\xi \quad \text{(Parabel.)} \tag{85}$$

Weiter ist

$$\frac{n}{x_1} - \frac{1}{x_0} = \frac{n-1}{r_0}. \tag{86}$$

Ist also r_0 und auch n gegeben, so lässt sich x_1 zu einem bestimmten x_0 berechnen, und umgekehrt. —

Vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung des Herrn Professors Dr. phil. et med. L. Matthiessen, Direktors des physikalischen Instituts der Universität zu Rostock, ausgeführt. — Es gereicht mir zur angenehmen Pflicht, Herrn Professor Dr. Matthiessen meinen verbindlichsten Dank für die freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit auszusprechen.